Subject reduction (Preservación de tipos)

$\Gamma \vdash P$ $\qquad$ $\Gamma \vdash t : P$ $\qquad$ $t \to r$ $\qquad$ $\Gamma \vdash r : P$

$t ::= x \mid \lambda x.t \mid tt \mid n \mid t \otimes r \mid \text{ifz } t \text{ then } t \text{ else } t \mid \text{let } x = t \text{ in } t \mid \mu x.t$

$(\lambda x.t) r \to t[r/x]$

$n \otimes m \to p$ si $n \otimes m = p$

ifz

let

μ

$t \to r$

$ts \to rs$

Lema

Teorema Si $\Gamma \vdash t : A$
y $t \to r$
entonces $\Gamma \vdash r : A$

Demo Por inducción en la relación $\to$.

- $(\lambda x.t) r \to t[r/x]$
  y $\Gamma \vdash (\lambda x.t) r : A$ (1)
  QVQ $\Gamma \vdash t[r/x] : A$

  de (1) $\Gamma \vdash \lambda x.t : B \Rightarrow A$ entonces $\Gamma, x:B \vdash t : A$ (2)
  $\Gamma \vdash r : B$ (3)

  de (2) y (3), por lema de sustitución, tengo
  $\Gamma \vdash t[r/x] : A$

> **Lema (Sustitución)**
> Si $\Gamma, x:B \vdash t : A$
> y $\Gamma \vdash r : B$
> entonces $\Gamma \vdash t[r/x] : A$
>
> Demo: en un rato.

- $n \otimes m \to p$ (donde $n \otimes m = p$)
  y $\Gamma \vdash n \otimes m : A$ (1)
  QVQ $\Gamma \vdash p : A$

  de (1) $A = nat$ y de la regla ax_n $\quad \Gamma \vdash p : nat$

- $\text{ifz } 0 \text{ then } t \text{ else } r \to t$
  y $\Gamma \vdash \text{ifz } 0 \text{ then } t \text{ else } r : A$ (1)
  QVQ $\Gamma \vdash t : A$

$$\frac{\Gamma \vdash 0 : nat \quad \Gamma \vdash t : A \quad \Gamma \vdash r : A}{\Gamma \vdash \text{ifz } 0 \text{ then } t \text{ else } r : A}\ \text{ifz}$$

  de (1) $\Gamma \vdash t : A$

- $\text{ifz } n \text{ then } t \text{ else } r \to r$ $(n > 0)$
  y $\Gamma \vdash \text{ifz } n \text{ then } t \text{ else } r : A$ (1)
  QVQ $\Gamma \vdash r : A$

  de (1) $\Gamma \vdash r : A$

- $\text{let } x = r \text{ in } t \to t[r/x]$

  y $\Gamma \vdash \text{let } x = r \text{ in } t : A$ (1)

  QVQ $\Gamma \vdash t[r/x] : A$

  de (1) $\Gamma, x : B \vdash t : A$ y $\Gamma \vdash r : B$

  y por lema de sustitución $\Gamma \vdash t[r/x] : A$

Sust.

$\Gamma, x : B \vdash t : A$

$\Gamma \vdash r : B$

entonces

$\Gamma \vdash t[r/x] : A$

- $\mu x.t \to t[\mu x.t/x]$

  y $\Gamma \vdash \mu x.t : A$ (1)

  QVQ $\Gamma \vdash t[\mu x.t/x] : A$

  $r = \mu x.t$
  $B = A$

  de (1) $\Gamma, x : A \vdash t : A$ (2)

  de (1) y (2) por lema de sustitución

  $\Gamma \vdash t[\mu x.t/x] : A$

- $\dfrac{t \to t'}{t\,r \to t'\,r}$ y $\Gamma \vdash t\,r : A$ (1)

  HI: Si $\Gamma \vdash t : B$ entonces $\Gamma \vdash t' : B$

  QVQ $\Gamma \vdash t'\,r : A$

  de (1) $\Gamma \vdash t : C \Rightarrow A$ y $\Gamma \vdash r : C$

  por HI $\Gamma \vdash t' : C \Rightarrow A$

  entonces $\dfrac{\Gamma \vdash t' : C \Rightarrow A \quad \Gamma \vdash r : C}{\Gamma \vdash t'\,r : A}$ ✓

- $\dfrac{t \to t'}{\lambda x.t \to \lambda x.t'}$ y $\Gamma \vdash \lambda x.t : A \Rightarrow B$ (1)

  HI: Si $\Delta \vdash t : C$ entonces $\Delta \vdash t' : C$

  QVQ $\Gamma \vdash \lambda x.t' : A \Rightarrow B$

  de (1) $\Gamma, x : A \vdash t : B$

  por HI $\Gamma, x : A \vdash t' : B$

  entonces $\dfrac{\Gamma, x : A \vdash t' : B}{\Gamma \vdash \lambda x.t' : A \Rightarrow B}$ ✓

- $\dfrac{t \to t'}{\text{let } x = t \text{ in } r \to \text{let } x = t' \text{ in } r}$ y $\Gamma \vdash \text{let } x = t \text{ in } r : A$ (1)

  HI: Si $\Gamma \vdash t : B$ entonces $\Gamma \vdash t' : B$

  QVQ $\Gamma \vdash \text{let } x = t' \text{ in } r : A$

  de (1) $\Gamma, x : B \vdash r : A$ y $\Gamma \vdash t : B$

  por HI $\Gamma \vdash t' : B$

  entonces $\dfrac{\Gamma, x : B \vdash r : A \quad \Gamma \vdash t' : B}{\Gamma \vdash \text{let } x = t' \text{ in } r : A}$ ✓

- Resto de los casos: ejercicio

$\square$

Lema de sustitución

Si $\Gamma, x:B \vdash t:A$

y $\boxed{\Gamma \vdash r:B}$ (1)

entonces $\Gamma \vdash t[r/x] : A$

$t = x \mid \lambda x.t \mid t\,t \mid n \mid t \otimes t$
$\mid \text{if } t \text{ then } t \text{ else } t$
$\mid \text{let } x = t \text{ in } t \mid \mu x.t$

Demo Inducción en t

- $t = x$ y $\Gamma, x:B \vdash x:A$ entonces $A = B$ (2)

QVQ $\Gamma \vdash x[r/x] : A$

es decir QVQ $\Gamma \vdash r : A$

directo de (1) y (2)

- $t = y \neq x$ y $\Gamma, x:B \vdash y:A$ entonces $\Gamma = \Delta, y:A$ (2)

$\Gamma \vdash r:B$ (1)

QVQ $\Gamma \vdash y[r/x] : A$

es decir $\Delta, y:A \vdash y:A$

directo de la regla ax

- $t = \lambda y.t'$ y $\Gamma, x:B \vdash \lambda y.t' : A$ entonces $A = C \Rightarrow D$

y $\Gamma, x:B, y:C \vdash t':D$ (2)

Δ

QVQ $\Gamma \vdash (\lambda y.t')[r/x] : A$

es decir $\Gamma \vdash \lambda y. t'[r/x] : C \Rightarrow D$

HI: $\Delta, x:B \vdash t':D$

y $\Delta \vdash r:B$

entonces $\Delta \vdash t'[r/x] : D$

es decir QVQ $\Gamma, y:C \vdash t'[r/x] : D$

$\Delta = \Gamma, y:C$

Por Weakening de (1) $\Gamma, y:C \vdash r:B$

Por HI $\Gamma, y:C \vdash t'[r/x] : D$

Lema (Weakening)

$y \notin FV(\Gamma)$ y $y \notin FV(r)$

$\Gamma \vdash r:B \Rightarrow \Gamma, y:C \vdash r:B$

- $t = t_1 t_2$ y $\Gamma, x:B \vdash t_1 t_2 : A$ entonces $\Gamma, x:B \vdash t_1 : C \Rightarrow A$ (2)

$\Gamma, x:B \vdash t_2 : C$ (3)

QVQ $\Gamma \vdash (t_1 t_2)[r/x] : A$

es decir QVQ $\Gamma \vdash t_1[r/x]\ t_2[r/x] : A$

HI (2) $\Gamma, x:B \vdash t_1 : C \Rightarrow A$

$\Gamma \vdash r:B$

entonces $\Gamma \vdash t_1[r/x] : C \Rightarrow A$ (4)

Por HI ((4) y (5))

$$\frac{\Gamma \vdash t_1[r/x] : C \Rightarrow A \qquad \Gamma \vdash t_2[r/x] : C}{\Gamma \vdash t_1[r/x]\ t_2[r/x] : A}$$

y (3) $\Gamma, x:B \vdash t_2 : C$

$\Gamma \vdash r:B$

entonces $\Gamma \vdash t_2[r/x] : C$ (5)

- $t = n$ y $\Gamma, x:B \vdash n : A$ (1) $\longrightarrow$ $A = nat$

QVQ $\Gamma \vdash n[r/x] : A$

es decir QVQ $\Gamma \vdash n : nat$

directo del axn

- $t = t_1 \otimes t_2$

$\Gamma, x:B \vdash t_1 \otimes t_2 : A$ entonces $A = nat$

$\Gamma, x:B \vdash t_1 : nat$ (2)

$\Gamma, x:B \vdash t_2 : nat$ (3)

HI (2) $\Gamma, x:B \vdash t_1 : nat$

$\Gamma \vdash r : B$

entonces $\Gamma \vdash t_1[r/x] : nat$ (4)

y (3) $\Gamma, x:B \vdash t_2 : nat$

$\Gamma \vdash r : B$

entonces $\Gamma \vdash t_2[r/x] : nat$ (5)

QVQ $\Gamma \vdash (t_1 \otimes t_2)[r/x] : A$

es decir QVQ $\Gamma \vdash t_1[r/x] \otimes t_2[r/x] : nat$

Por HI ((4) y (5))

$$\frac{\Gamma \vdash t_1[r/x] : nat \qquad \Gamma \vdash t_2[r/x] : nat}{\Gamma \vdash t_1[r/x] \otimes t_2[r/x] : nat}$$

- $t = ifz\ t_1\ then\ t_2\ else\ t_3$

y $\Gamma, x:B \vdash ifz\ t_1\ then\ t_2\ else\ t_3 : A$ entonces

$\Gamma, x:B \vdash t_1 : nat$ (1)

$\Gamma, x:B \vdash t_2 : A$ (2)

$\Gamma, x:B \vdash t_3 : A$ (3)

QVQ $\Gamma \vdash (ifz\ t_1\ then\ t_2\ else\ t_3)[r/x] : A$

es decir QVQ $\Gamma \vdash ifz\ t_1[r/x]\ then\ t_2[r/x]\ else\ t_3[r/x] : A$

HI
- $\Gamma \vdash t_1[r/x] : nat$
- $\Gamma \vdash t_2[r/x] : A$
- $\Gamma \vdash t_3[r/x] : A$

Por HI y regla ifz

$\Gamma \vdash ifz\ t_1[r/x]\ then\ t_2[r/x]\ else\ t_3[r/x] : A$

- $t = let\ y = t_1\ in\ t_2$ y $\Gamma, x:B \vdash let\ y = t_1\ in\ t_2 : A$ entonces

$\Gamma, x:B, y:C \vdash t_2 : A$ (2)

$\Gamma, x:B \vdash t_1 : C$ (3)

$\Gamma \vdash r : B$ (1)

QVQ $\Gamma \vdash (let\ y = t_1\ in\ t_2)[r/x] : A$

es decir QVQ $\Gamma \vdash let\ y = t_1[r/x]\ in\ t_2[r/x] : A$

HI de (1) y (3)

$\Gamma \vdash t_1[r/x] : C$ (5)

de (1) y weakening

$\Gamma, y:C \vdash r : B$ (4)

HI de (2) y (4)

$\Gamma, y:C \vdash t_2[r/x] : A$ (6)

de (5) y (6)

$$\frac{\Gamma, y:C \vdash t_2[r/x] : A \qquad \Gamma \vdash t_1[r/x] : C}{\Gamma \vdash let\ y = t_1[r/x]\ in\ t_2[r/x] : A}\ let$$

- $t = \mu y.t'$ y $\Gamma, x:B \vdash \mu y.t' : A$ entonces

$\Gamma, x:B, y:A \vdash t' : A$ (2)

QVQ $\Gamma \vdash (\mu y.t')[r/x] : A$

es decir $\Gamma \vdash \mu y.\ t'[r/x] : A$

de (1) y weakening

$\Gamma, y:A \vdash r : B$ (3)

HI con (2) y (3) $\Gamma, y:A \vdash t'[r/x] : A$ (4)

de (4)

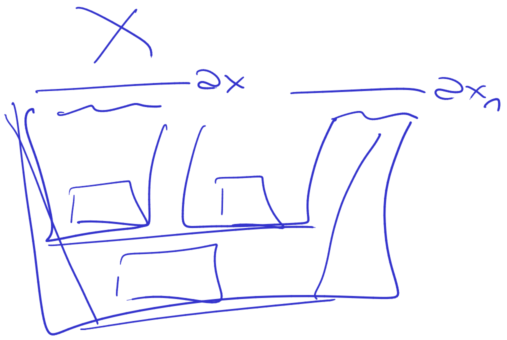
$$\frac{\Gamma, y:A \vdash t'[r/x] : A}{\Gamma \vdash \mu y.\ t'[r/x] : A}\ fix$$

✓

Lema de weakening

Si $\Gamma \vdash t : A$ entonces $\Gamma, y:B \vdash t:A$

y y fresh



Demo inducción en la derivación de $\Gamma \vdash t:A$

- ax) $\Gamma = \Delta, x:A$, $t = x$

  QVQ $\Delta, x:A, y:B \vdash x:A$

  directo de la regla ax

- $\Rightarrow_i$) $t = \lambda x.t'$ y $A = C \Rightarrow D$

  $$\frac{\Gamma, x:C \vdash t':D}{\Gamma \vdash \lambda x.t' : C \Rightarrow D}\Rightarrow_i$$

  QVQ $\Gamma, y:B \vdash \lambda x.t' : C \Rightarrow D$

  $$\text{HI}: \frac{\Gamma, x:C, y:B \vdash t':D}{\Gamma, y:B \vdash \lambda x.t' : C \Rightarrow D}\Rightarrow_i$$

- $\Rightarrow_e$) $t = t_1 t_2$

  $$\frac{\Gamma \vdash t_1 : C \Rightarrow A \qquad \Gamma \vdash t_2 : C}{\Gamma \vdash t_1 t_2 : A}\Rightarrow_e$$

  QVQ $\Gamma, y:B \vdash t_1 t_2 : A$

  $$\text{HI} \quad \frac{\Gamma, y:B \vdash t_1 : C \Rightarrow A \qquad \Gamma, y:B \vdash t_2 : C}{\Gamma, y:B \vdash t_1 t_2 : A}$$

- ax_n) $t = n$ y $A = nat$

  $\Gamma \vdash n : nat$

  QVQ $\Gamma, y:B \vdash n : nat$

  directo de ax_n

- fix) $t = \mu x.t'$

  $$\frac{\Gamma, x:A \vdash t':A}{\Gamma \vdash \mu x.t' : A}\text{fix}$$

  QVQ $\Gamma, y:B \vdash \mu x.t' : A$

  $$\text{HI} \quad \frac{\Gamma, x:A, y:B \vdash t':A}{\Gamma, y:B \vdash \mu x.t' : A}\text{fix}$$