Práctica 3: Inferencia de tipos + Polimorfismo

Sección I: Inferencia de tipos

1. Dar el tipo principal, y todos los tipos, de los siguientes términos.

   a) $\lambda x.x$
   b) $(\lambda x.x + 1)2$
   c) $\lambda x.\lambda y.xy$
   d) $\mathsf{let}\ x = \lambda x.x + 1\ \mathsf{in}\ x3$
   e) $\mathsf{let}\ x = \lambda x.x + 1\ \mathsf{in}\ x(\lambda x.x)$
   f) $\mu f.\lambda n.\lambda m.\mathsf{ifz}\ m\ \mathsf{then}\ 1\ \mathsf{else}\ n \times fn(m - 1)$
   g) $\lambda x.\lambda y.x(y + 1) + 2$
   h) $\mathsf{let}\ x = \lambda x.x\ \mathsf{in}\ xx$
   i) $(\lambda x.x)(\lambda x.x)$
   j) $\lambda x.xx$

2. Extender los algoritmos de Hindley y Robinson para la extensión de PCF con booleanos de la práctica anterior.

3. Extender los algoritmos de Hindley y Robinson para la extensión de PCF con pares de la práctica anterior.

4. Extender los algoritmos de Hindley y Robinson para la extensión de PCF con listas de la práctica anterior.

5. Extender PCF con árboles binarios, extendiendo: la gramática, la semántica operacional, las reglas de tipado y el algoritmo de inferencia de tipos. Los constructores deberían ser:

$$\begin{aligned}
\mathsf{L}n &: \text{Una hoja con contenido } n\\
\mathsf{T}ntu &: \text{Un árbol binario, con subárboles } t \text{ y } u \text{ y } n \text{ en su nodo}\\
\mathsf{ifLeaf}\ t\ \mathsf{then}\ u\ \mathsf{else}\ v &\ \text{Testea si es una hoja}\\
\mathsf{content}\ t &: \text{Contenido del nodo}\\
\mathsf{left}\ t &: \text{Subárbol izquierdo (reduce a } t \text{ si es una hoja)}\\
\mathsf{right}\ t &: \text{Subárbol derecho (reduce a } t \text{ si es una hoja)}
\end{aligned}$$

6. En el caso general de un lenguaje sin variables ligadas, reemplazamos las primeras tres reglas del algoritmo de Robinson por las siguientes dos:

   - Si una ecuación tiene la forma

   $$f(U_1, \dots, U_n) = f(V_1, \dots, V_n)$$

   reemplazarla por las ecuaciones $U_1 = V_1, \dots, U_n = V_n$.

- Si una ecuación tiene la forma

$$f(U_1, \dots, U_n) = g(V_1, \dots, V_n)$$

  done f y g son símbolos distintos, devolver error.

a) En un lenguaje formado por un símbolo $+$ que toma dos argumentos y las constantes enteras:

1) ¿Tiene solución la ecuación $(2 + (3 + X)) = (X + (Y + 2))$?
2) ¿Tiene solución la ecuación $X + 2 = 4$?
3) ¿Cuál es la diferencia entre las dos ecuaciones anteriores y lo que aprendimos en la escuela?

b) Usar la semántica operacional de PCF para definir otra noción de solución que coincida con lo que vimos en la escuela, y mostrar que $X+2 = 4$ tiene solución en ese caso.

Sección II: Polimorfismo

1. Dar el tipo más general a cada uno de los siguientes términos (sin usar el algoritmo de inferencia).

   a) $\lambda x.x$

   b) $(\lambda x.x + 1)2$

   c) $\lambda x.\lambda y.xy$

   d) $\mathsf{let}\ x = \lambda x.x + 1\ \mathsf{in}\ x3$

   e) $\mathsf{let}\ x = \lambda x.x + 1\ \mathsf{in}\ x(\lambda x.x)$

   f) $\mu f.\lambda n.\lambda m.\mathsf{ifz}\ m\ \mathsf{then}\ 1\ \mathsf{else}\ n \times fn(m - 1)$

   g) $\lambda x.\lambda y.x(y + 1) + 2$

   h) $\mathsf{let}\ x = \lambda x.x\ \mathsf{in}\ xx$

   i) $(\lambda x.x)(\lambda x.x)$

   j) $\lambda x.xx$

2. Extender PCF polimórfico con listas, como en la práctica 3, sólo que ahora usaremos el tipo list con un tipo como argumento. Así, escribimos $\mathsf{list}[\mathsf{nat}]$ al tipo de listas de naturales, $\mathsf{list}[\mathsf{nat} \Rightarrow \mathsf{nat}]$ al tipo de las listas de funciones de naturales en naturales, y $\mathsf{list}[\mathsf{list}[\mathsf{nat}]]$ al tipo de las listas que como elementos tienen listas de naturales.

   Escribir la función map que toma una función f y una lista, y aplica f a cada elemento de la lista. Dar un tipo para map

3. System F es un sistema de tipos polimórfico más general que el visto en clase. En System F el polimorfismo puede aparecer en cualquier lugar, sin restricciones (a excepción de la restricción de la introducción del cuantificador universal, que implide derivar el tipo $\forall X.X$). En consecuencia, la inferencia se vuelve indecidible.

La gramática de tipos de System F es la siguiente:

$$A ::= X \mid \mathsf{nat} \mid A \Rightarrow A \mid \forall X.A$$

a) Dar las reglas de tipado de System F.

b) Dar los tipos más generales, en System F, para los términos del punto 1.