Práctica 5: Registros y objetos + Semántica denotacional

Sección I: Registros y objetos

1. Todos los constructores de PCF tienen un número fijo de argumentos, por lo tanto, el constructor $\{\}$ que tiene $2n$ argumentos, para cualquier n, no está bien definido. ¿Cómo podemos redefinirlo para que tenga un número fijo de argumentos?

2. Extender el intérprete CBV para PCF con registros.

3. Extender el intérprete CBN para PCF con registros.

4. Supongamos que tenemos un registro con tres campos: nombre, $\mathsf{apellido}$ y $\mathsf{telefono}$.
   - Escribir una función N tal que $\mathsf{N}xy = x(\mathsf{nombre} \leftarrow y)$, sin utilizar $\leftarrow$.
   - Escribir una función A tal que $\mathsf{A}xy = x(\mathsf{apellido} \leftarrow y)$, sin utilizar $\leftarrow$.
   - Escribir una función T tal que $\mathsf{T}xy = x(\mathsf{telefono} \leftarrow y)$, sin utilizar $\leftarrow$.

   Es decir que $\leftarrow$ es sólo syntax-sugar.

5. Extender el intérprete CBV para PCF con objetos.

6. Extender el intérprete CBN para PCF con objetos.

7. ¿El valor del término
$$((\{x = \sigma s.4, f = \sigma s.\lambda y.y + s\#x\}(x \leftarrow \sigma s.5))\#f)6$$
   es 10 u 11?

8. Rehacer el ejercicio de la sección 8.2.1, en PCF con objetos.

9. Extendemos la gramática de tipos de la siguiente manera:
$$A := \mathsf{nat} \mid A \Rightarrow A \mid \mathsf{Reg}[l_1 = A, \ldots, l_n = A]$$
   con $l_1, \ldots, l_n \in L$, y donde el número de typos que puede recibir el constructor Reg es variable (sabemos que podríamos hacer lo mismo con un constructor con un número fijo de parámetros, gracias al Ejercicio 1).
   (a) Extender las reglas de tipado para tipar registros.
   (b) Tipar el ejemplo de la sección 8.2.1.

10. Extender los tipos simples de PCF para tipar objetos, y tipar el término del ejercicio 8.

Sección II: Semántica denotacional

1. Dar la semántica denotacional de los siguientes términos.

   (a) $\lambda x : \mathsf{nat}.0$

   (b) $\mathsf{fix}\ x : \mathsf{nat}.x$

   (c) $\lambda x : \mathsf{nat}.(\lambda y : \mathsf{nat}.y)x + 1$

   (d) $(\lambda x : \mathsf{nat}.0)(\mathsf{fix}\ x : \mathsf{nat}.x)$

   (e) Fact

   (f) $\mathsf{Fact}\ 2$

2. Si $[\![t]\!]_\theta = 0$, $[\![r]\!]_\theta = 0$ y $[\![s]\!]_\theta = \perp_{\mathbb{N}}$, ¿quién es $[\![\mathsf{ifz}\ t\ \mathsf{then}\ r\ \mathsf{else}\ s]\!]_\theta$?

3. Dar la semántica operacional a grandes pasos, a pequeños pasos y la denotacional a los siguientes términos:

   (a) $\lambda x : \mathsf{nat}.x$

   (b) $\lambda x : \mathsf{nat} \Rightarrow \mathsf{nat}.x$

   (c) $\lambda x : \mathsf{nat} \Rightarrow \mathsf{nat}.\lambda y : \mathsf{nat}.xy$

   (d) $\mathsf{let}\ x : \mathsf{nat} \Rightarrow \mathsf{nat} = \lambda x : \mathsf{nat}.x + 1\ \mathsf{in}\ x3$

   (e) $(\lambda x : \mathsf{nat}.\mathsf{fix}\ x : \mathsf{nat}.x + 1)((\lambda x : \mathsf{nat}.x)2)$

   (f) $\mathsf{fix}\ f : \mathsf{nat} \Rightarrow \mathsf{nat}.\lambda n : \mathsf{nat}.\lambda m : \mathsf{nat}.\mathsf{ifz}\ m\ \mathsf{then}\ 1\ \mathsf{else}\ n \times fn(m-1)$

4. Modificar la semántica denotacional incluyendo el elemento error en todo conjunto, con el fin de detectar la división por 0.

5. Extender la semántica denotacional con error, para PCF con pares.

6. Demostrar que para toda valuación θ válida en $FV(t) \cup FV(s)$ se tiene $[\![t[s/x]]\!]_\theta = [\![t]\!]_{\theta, x = [\![s]\!]_\theta}$ (lema de sustitución).

7. Demostrar el teorema de soundness.