

## Práctica 2: Estrategias de reducción + PCF tipado

### Sección I: Estrategias de reducción

1. ¿Cuales de las siguientes reducciones son correctas?

- (a)  $\lambda x.x \rightarrow \lambda x.x$
- (b)  $\lambda x.x \rightarrow^* \lambda x.x$
- (c)  $\lambda x.x \rightarrow^+ \lambda x.x$
- (d)  $(\lambda x.\lambda y.x)tu \rightarrow t$
- (e)  $(\lambda x.\lambda y.x)tu \rightarrow^* t$
- (f)  $(\lambda x.x)((\lambda y.t)u) \rightarrow (\lambda x.x)t$  con  $y \notin FV(t)$
- (g)  $(\lambda x.x)((\lambda y.t)u) \rightarrow^* (\lambda x.x)t$  con  $y \notin FV(t)$
- (h)  $(\lambda x.x)((\lambda y.t)u) \rightarrow^+ (\lambda x.x)t$  con  $y \notin FV(t)$
- (i)  $\mu x.x \rightarrow \mu x.x$
- (j)  $\mu x.x \rightarrow^* \mu x.x$
- (k)  $\mu x.x \rightarrow^+ \mu x.x$

2. Determinar todos los redexes de cada término.

- (a)  $(\lambda x.x)((\lambda x.x)\lambda x.x)$
- (b)  $(\lambda x.\lambda y.(\lambda z.z)x)\mu x.x$
- (c) `ifz 2 – 1 then ( $\lambda x.x$ )2 else 1`
- (d)  $\lambda x.(\lambda y.(\lambda z.(\lambda z.z)z)y)x$

3. Dar todas las reducciones posibles de los siguientes términos.

- (a)  $(\lambda x.\lambda y.yy)(\mu x.x)\lambda x.x$
- (b)  $\lambda x.(\lambda y.(\lambda z.(\lambda w.w)z)y)x$

4. ¿Cuál de los siguientes tiene forma normal?

- (a)  $(\lambda x.x)((\lambda x.\lambda y.x)(\lambda y.y)(\lambda z.zz))$
- (b)  $(\lambda x.xx)(\lambda y.y)(\lambda x.xx)$
- (c)  $(\lambda x.\lambda y.xyy)(\lambda y.y)(\lambda x.xx)$

5. Dar dos términos que cumplan:

- (a) Están en forma normal.
- (b) No están en forma normal pero son fuertemente normalizables.
- (c) Normalizables pero no fuertemente normalizables.
- (d) No normalizables

6. Demostrar que un término es cerrado (es decir, sin variables libres) y en forma normal en una reducción débil sí y sólo sí tiene la forma:
  - $\lambda x.t$ , con  $FV(t) = \{x\}$  o  $FV(t) = \emptyset$
  - $n \in \mathbb{N}$
  - $uv$  donde  $u$  y  $v$  son cerrados e irreducibles y  $u$  no es de la forma  $\lambda x.t$ .
  - $u \otimes v$  donde  $u$  y  $v$  son cerrados e irreducibles y no ambos son constantes numéricas, o  $u \in \mathbb{N}$ ,  $\otimes = /$  y  $v = 0$ .
  - **ifz**  $u$  **then**  $v$  **else**  $s$ , donde  $u$  es cerrado e irreducible y no es una constante numérica y  $FV(v) = FV(s) = \emptyset$ .
7. ¿Cuales son los términos cerrados y en forma normal en call-by-name? ¿y en call-by-value?
8. Dar la traza de  $(\lambda x.x \times x)(5 + 6)$  en call-by-name y en call-by-value.
9. Dar la traza de  $(\lambda x.(\lambda x.0)(x + x))(Fact\ 2)$  en
  - (a) call-by-name fuerte
  - (b) call-by-name débil
  - (c) call-by-value fuerte
  - (d) call-by-value débil
10. Dar la traza de  $(\lambda x.\lambda y.(1 + x) + y)((\lambda z.z \times z)2)$  en
  - (a) call-by-name fuerte
  - (b) call-by-name débil
  - (c) call-by-value fuerte
  - (d) call-by-value débil

## Sección II: PCF tipado

11. Tipar los siguientes términos (si es posible).
  - (a)  $\lambda x : \text{nat}.x$
  - (b)  $\lambda x : \text{nat} \Rightarrow \text{nat}.x$
  - (c)  $\lambda x : \text{nat} \Rightarrow \text{nat}.\lambda y : \text{nat} \Rightarrow \text{nat}.xy$
  - (d)  $\lambda x : \text{nat} \Rightarrow \text{nat}.\lambda y : \text{nat}.xy$
  - (e) **let**  $x : \text{nat} \Rightarrow \text{nat} = \lambda x : \text{nat}.x + 1$  **in**  $x3$
  - (f) **let**  $x : \text{nat} \Rightarrow \text{nat} = \lambda x : \text{nat}.x + 1$  **in**  $x(\lambda x : \text{nat}.x)$
  - (g)  $\mu f : A.\lambda n : B.\lambda m : C.\text{ifz } m \text{ then } 1 \text{ else } n \times fn(m - 1)$   
para algún  $A, B$  y  $C$ . ¿De qué función se trata?
12. Extender PCF con booleanos **true**, **false** e **if – then – else**.
  - (a) Dar la gramática, semántica operacional y reglas de tipado.
  - (b) Tipar:

- i.  $\text{if } (\lambda x : A.x)\text{true then } 2 \text{ else } 1$ , para algún  $A$ .
- ii.  $(\lambda x : \text{bool}.\text{if } x \text{ then } (\lambda x : \text{nat}.x) \text{ else } 0)\text{false}$
- iii.  $\lambda x : \text{bool}.\text{if } x \text{ then false else true}$

13. Extender PCF con constructores para pares:  $(t, u)$ ,  $\text{fst}(t, u)$  y  $\text{snd}(t, u)$ .

- (a) Dar la gramática, semántica operacional y reglas de tipado.
- (b) Escribir una suma que reciba un par y otra que reciba dos argumentos, y tiparlos.
- (c) Definir una función `curry` que tome una función que espera un par, y dos argumentos, y ejecute esa función con esos argumentos y tiparla.
- (d) Definir una función `uncurry` que tome una función que espera dos argumentos y un par, y ejecute esa función con los elementos del par, y tiparla.

14. Extender PCF con constructores de listas de números:

<code>nil</code>	(lista vacía)
<code>cons tu</code>	(agregar el elemento $t$ a la lista $u$ )
<code>ifnil <math>t</math> then <math>u</math> else <math>v</math></code>	(if lista vacía)
<code>hd <math>t</math></code>	(head)
<code>tl <math>t</math></code>	(tail)

- (a) Dar la gramática, semántica operacional y reglas de tipado.
- (b) Escribir una función que sume los elementos de una lista de 4 elementos. Tiparla.
- (c) Tipar la función del ítem anterior aplicada a

`cons 0(cons (( $\lambda x : \text{nat}.x + 1$ )2)(cons 2(cons 1 nil)))`

y dar su traza de reducción en CBN.