Práctica 3: PCF tipado

1. Tipar los siguientes términos (si es posible).

   a) $\lambda x : \mathsf{nat}.x$

   b) $\lambda x : \mathsf{nat} \Rightarrow \mathsf{nat}.x$

   c) $\lambda x : \mathsf{nat} \Rightarrow \mathsf{nat}.\lambda y : \mathsf{nat} \Rightarrow \mathsf{nat}.xy$

   d) $\lambda x : \mathsf{nat} \Rightarrow \mathsf{nat}.\lambda y : \mathsf{nat}.xy$

   e) $\mathsf{let}\ x : \mathsf{nat} \Rightarrow \mathsf{nat} = \lambda x : \mathsf{nat}.x + 1\ \mathsf{in}\ x3$

   f) $\mathsf{let}\ x : \mathsf{nat} \Rightarrow \mathsf{nat} = \lambda x : \mathsf{nat}.x + 1\ \mathsf{in}\ x(\lambda x.x)$

   g) $\mathsf{fix}\ f : A.\lambda n : B.\lambda m : C.\mathsf{ifz}\ m\ \mathsf{then}\ 1\ \mathsf{else}\ n \times fn(m-1)$
   para algún A, B y C. ¿De qué función se trata?

2. Extender PCF con booleanos true, false e $\mathsf{if} - \mathsf{then} - \mathsf{else}$.

   a) Dar la gramática, semántica operacional y reglas de tipado.

   b) Tipar:

      1) $\mathsf{if}\ (\lambda \mathsf{x} : \mathsf{A.x})\mathsf{true}\ \mathsf{then}\ 2\ \mathsf{else}\ 1$, para algún A.
      2) $(\lambda x : \mathsf{bool.if\ x\ then}\ (\lambda \mathsf{x} : \mathsf{nat.x})\ \mathsf{else}\ 0)\mathsf{false}$
      3) $\lambda x : \mathsf{bool.if\ x\ then\ false\ else\ true}$

3. Extender PCF con constructores para pares: (t, u), $\mathsf{fst}(t, u)$ y $\mathsf{snd}(t, u)$.

   a) Dar la gramática, semántica operacional y reglas de tipado.

   b) Escribir una suma que reciba un par y otra que reciba dos argumentos, y tiparlos.

   c) Definir una función curry que tome una función que espera un par, y dos argumentos, y ejecute esa función con esos argumentos y tiparla.

   d) Definir una función $\mathsf{uncurry}$ que tome una función que espera dos argumentos y un par, y ejecute esa función con los elementos del par, y tiparla.

4. Extender PCF con constructores de listas de números:

nil	(lista vacía)
$\mathsf{cons}\ tu$	(agregar el elemento t a la lista u)
$\mathsf{ifnil}\ t\ \mathsf{then}\ u\ \mathsf{else}\ v$	(if lista vacía)
$\mathsf{hd}\ t$	(head)
$\mathsf{tl}\ t$	(tail)

   a) Dar la gramática, semántica operacional y reglas de tipado.

   b) Escribir una función sume los elementos de una lista de 4 elementos. Tiparla.

   c) Tipar la función del ítem anterior aplicada a

   $$\mathsf{cons}\ 0(\mathsf{cons}\ ((\lambda \mathsf{x} : \mathsf{nat.x} + 1)2)(\mathsf{cons}\ 2(\mathsf{cons}\ 1\ \mathsf{nil})))$$

   y dar su traza de reducción en CBN.